

Лекция 5.

18. Полные и неполные изображения. Пусть на плоскости σ дано изображение F некоторой фигуры \bar{F} . Изображение F называется **полным**, если к нему можно присоединить изображение R аффинного репера так, что все точки, прямые и плоскости, определяющие фигуру \bar{F} , будут заданными на плоскости σ . При этом точка \bar{M} считается заданной, если на плоскости изображений σ даны ее аксонометрическая проекция M и одна из вторичных проекций, например M_3 . Прямая \bar{a} считается заданной, если заданы две ее точки или даны аксонометрическая и одна из ее вторичных проекций. Плоскость считается заданной, если заданы элементы, определяющие ее (три точки, не лежащие на одной прямой, две прямые или следы).

Например, изображение $ABCD A' B' C' D'$ параллелепипеда \bar{F} на рисунке 40, б является полным. В самом деле, присоединим к нему изображение (A, B, D, A') аффинного репера. Тогда все вершины параллелепипеда \bar{F} окажутся заданными, так как для них однозначно определены аксонометрические и вторичные проекции: (A, A) , (B, B) , (C, C) , (D, D) , (A', A) , (B', B) , (C', C) , (D', D) . Отсюда следует, что и все ребра и грани параллелепипеда окажутся заданными. Полными являются также изображения тетраэдров (рис.39), изображение цилиндра (рис.44), конуса (рис.46).

Можно показать, что свойство изображения быть полным (или неполным) не зависит от выбора присоединенного изображения аффинного репера.

Рассмотрим примеры неполных изображений.

Пример 3. На рисунке 63, а изображен шестигранник $SABCD$. Это изображение не является полным, так как если, например, к нему присоединить изображение (A, B, C, S) аффинного репера, то точки $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{S}$ окажутся заданными, а точка \bar{D} нет (не определена ее вторичная проекция D_3).

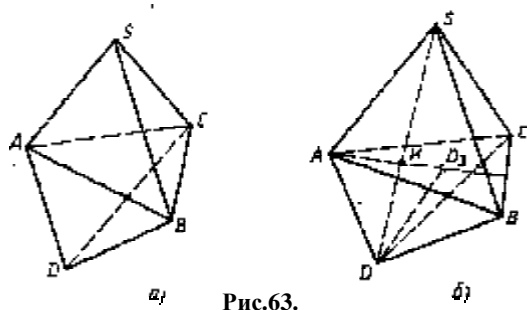
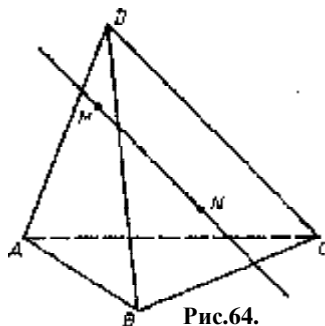


Рис.63.

Пример 4. На рисунке 64 изображен тетраэдр и прямая. Это изображение не является полным, так как если, например, к нему присоединить изображение (A, B, C, D) репера, то вершины тетраэдра \overline{ABCD} окажутся заданными, а точки \overline{M} и \overline{N} нет (не определены их вторичные проекции).

Число точек, которые надо добавить к чертежу, чтобы неполное изображение сделать полным, называется *коэффициентом неполноты данного изображения*. В примере 3 коэффициент неполноты равен единице, так если, например, к рисунку 63, а



добавить точку K - изображение точки пересечения отрезка \overline{SD} с плоскостью \overline{ABC} (рис.63, б), то изображение станет полным; теперь вторичную проекцию точки \overline{D} легко построить: D_3 есть точка пересечения прямой AK с прямой, проведенной через точку D параллельно AS (рис.63, б). В примере 4 коэффициент неполноты равен двум, так как, для того чтобы изображение сделать полным, можно, например, к рисунку 64 добавить точки M_3 и N_3 - вторичные проекции точек \overline{M} и \overline{N} или поступить так: считать, что точки M и N являются аксонометрическими про-

екциями точек пересечения прямой MN с гранями \overline{ABD} и \overline{BDC} тетраэдра. Тогда легко построить их вторичные проекции.

Можно показать, что понятие коэффициента неполноты не зависит от выбора присоединенного изображения аффинного репера.

19. Позиционные задачи. Пусть \overline{F}_1 и \overline{F}_2 две фигуры пространства, а F_1 и F_2 - их изображения на плоскости σ , выполненные в одной и той же проекции. *Задача построения изображения точек пересечения фигур \overline{F}_1 и \overline{F}_2 называется позиционной задачей.* Такие задачи удобно решать, пользуясь методом аксонометрии. Отметим, что любая позиционная задача на полном изображении имеет вполне определенное решение и не содержит никакого произвола. Если же изображение неполное, то, решая позиционную задачу, некоторые элементы можно задать произвольно.

Согласно школьной практики при решении задач данного и следующего пунктов мы не будем отличать точки оригинала от их аксонометрических проекций. В соответствии с этим соглашением точки или прямые оригинала обозначим теми же буквами $(A, B, C, \dots; a, b, c, \dots)$, что и их аксонометрические проекции (а не $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \dots; \overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \dots$, как мы это делали выше).

Задача 10. Дано изображение пирамиды $DABC$ и прямой, пересекающей грани ABD и BCD в точках M и N (рис.65). Найти след прямой MN на плоскости основания ABC .

Решение. Присоединим к изображению данной пирамиды изображение (A, B, C, D) аффинного репера. Тогда все вершины пирамиды и точки M и N будут заданными, поэтому данное изображение является полным.

Прямая MN лежит в плоскости DMN , поэтому след X_0 этой прямой лежит на следе p_0 плоскости DMN , т.е. $X_0 = MN \cap p_0$.

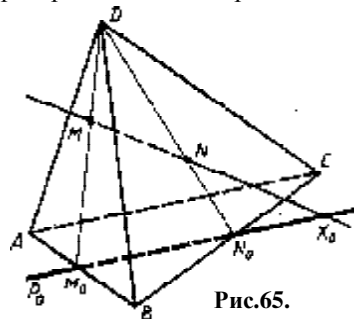


Рис.65.

Построим след p_0 плоскости DMN . Прямые DM и DN пересекают плоскость основания пирамиды в точках M_0 и N_0 , т.е. совпадает с прямой M_0N_0 . Таким образом, $X_0 = MN \cap p_0$.

Заметим, что данная задача решается с помощью только одной линейки.

20. Построение сечений простейших многогранников.

Плоскость называется секущей плоскостью многогранника, если по обе стороны от этой плоскости имеются точки данного многогранника. Многоугольник, сторонами которого являются отрезки, по которым секущая плоскость пересекает грани многогранника, называется сечением многогранника.

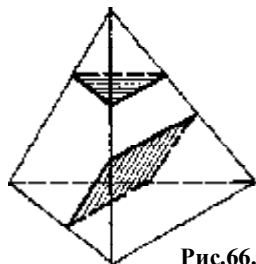


Рис.66.

Так как тетраэдр имеет четыре грани, то его сечениями могут быть только треугольники и четырехугольники (рис.66). Параллелепипед имеет шесть граней, поэтому его сечениями могут быть треугольники, четырехугольники, пятиугольники и шестиугольники (рис.67).

Рассмотрим примеры построения изображений сечений (или кратко “построения сечений”) призм и пирамид. Эти построения являются важными в школьной практике. Сначала решим задачу на построение сечений призм.

Задача 11. Дано изображение треугольной призмы $ABCA'B'C'$ и точек M, P, N , лежащих соответственно на ребре

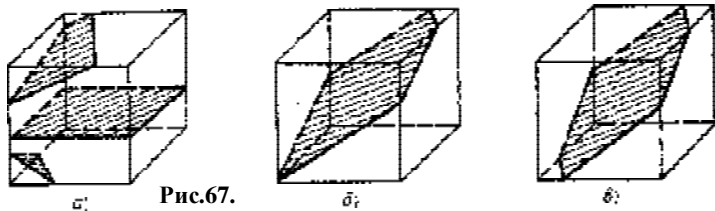


Рис.67.

AA' и гранях $ABB'A'$ и $BCC'B'$ (рис.68). Построить сечение этой призмы плоскостью MNP .

Решение. Присоединим к изображению данной призмы изображение (A, B, C, A') аффинного репера. Тогда все вершины призмы и точки M, P, N окажутся заданными, поэтому данное изображение является полным.

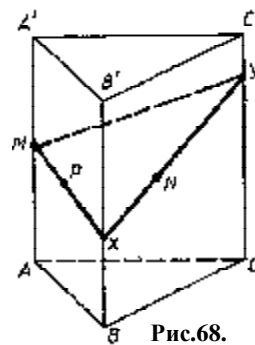


Рис.68.

Для решения задачи необходимо построить отрезки, по которым плоскость MNP пересекает грани данной призмы. Прямая MP лежит в плоскости грани $ABB'A'$ и пересекает ребро BB' в точке X , поэтому плоскость MNP пересекает грань $ABB'A'$ по отрезку MX (см. рис.68). Аналогично строим отрезок XU , по которому плоскость MNP пересекает грань $BCC'B'$. Построив отрезок MY , получаем искомое сечение - треугольник MXU .

Так как треугольная призма имеет пять граней, то ее сечениями могут быть треугольники, четырехугольники и пятиугольники. При изменении положения точек M, P, N на поверхности призмы мы можем получить все эти случаи. Например, на рисунке 69 плоскость MNP пересекает данную призму по четырехугольнику.

Задача 12. Дано изображение четырехугольной призмы $ABCD A'B'C'D'$ и точек M, N, K , лежащих соответственно на гранях $DAA'D'$, $ABB'A'$ и $BCC'B'$ (рис.70). Построить сечение этой призмы плоскостью MNK .

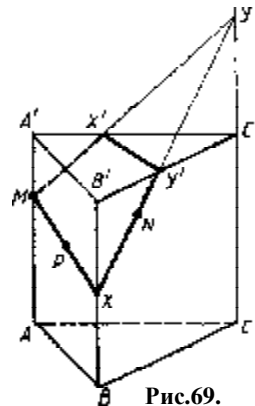


Рис.69.

Решение. Присоединим к изображению данной призмы изображение (D, A, C, D') аффинного репера. Тогда все вершины при-

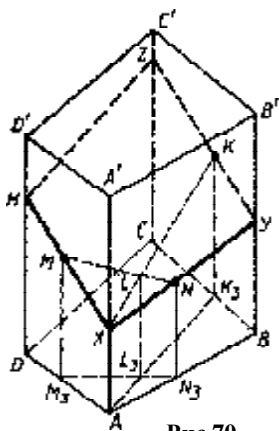


Рис.70.

змы и точки M, N, K окажутся заданными (вторичные проекции точек M, N, K находятся просто (рис.70)). Следовательно данное изображение является полным, и поэтому искомое сечение вполне определено.

Для решения задачи достаточно построить точку пересечения плоскости MNK с одним из боковых ребер данной призмы. Действительно, если мы построим, например, точку X пересечения плоскости MNK с ребром AA' , то затем, так же как и в задаче 11, сможем построить искомое сечение.

Точка X лежит в плоскости MNK , и ее вторичной проекцией является точка A , поэтому ее легко построить (см. задачу 6, стр. 52). Сначала построим точку $L_3 = AK \cap M_3N_3$ (рис.70), затем точку $L = MN \cap L_3L$, где $LL_3 \parallel DD'$, и, наконец, точку $X = KL \cap AA'$. Построив точку X , строим последовательно отрезки XY, XH, YZ , на которых лежат соответственно точки N, M, K . Построив отрезок HZ , получаем искомое сечение - четырехугольник $XYZH$.

Задача 13. Дано изображение параллелепипеда $ABCD A'B'C'D'$ и точек M, N, P , лежащих соответственно на ребрах AA', BB' и CC' (рис.71). Построить сечение параллелепипеда плоскостью MNP .

Решение. Отрезки MN и NP , очевидно, являются двумя сторонами искомого сечения. Для построения других сторон сечения можно поступить так же, как в задаче 12. Однако в данном случае задачу можно решить проще.

Так как грани $ABB'A'$ и $CC'D'D$ параллелепипеда параллельны, то прямая, прохо-

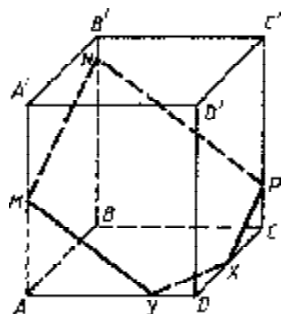


Рис.71.

дущая через точку P параллельно прямой MN , лежит в плоскости грани $CC'D'D$, поэтому легко построить точку X пересечения плоскости MNP с ребром CD : $X = DC \cap PX$, где $PX \parallel MN$. Аналогично строим точку $Y = AD \cap MY$, где $MY \parallel NP$. Искомым сечением является пятиугольник $MNPXY$.

Рассмотрим теперь задачи на пересечение пирамид.

Задача 14. Дано изображение треугольной пирамиды $SABC$ и точек M, N, P , лежащих соответственно на ребре SA и гранях ABS и BCS (рис.72). Построить сечение этой пирамиды плоскостью MNP .

Решение. Присоединим к изображению данной пирамиды изображение (A, B, C, S) аффинного репера. Тогда все вершины пирамиды и точки M, N, P окажутся заданными, поэтому изображение на рисунке 72 полное.

Прямая MN лежит в плоскости грани ABS и пересекает прямую BS в точке X , поэтому плоскость MNP пересекает грань ABS по отрезку MX_1 (рис.72). Прямая XP лежит в плоскости грани BCS и пересекает ребра BC и CS в точках Y и Z . Построив отрезки X_1Y и ZM , которые лежат соответственно в гранях ABC и ACS , получаем искомое сечение - четырехугольник MX_1YZ .

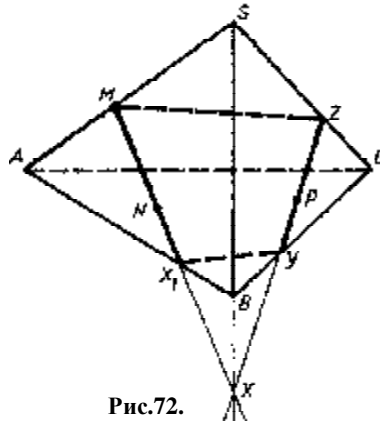


Рис.72.

Задача 15. Дано изображение четырехугольной пирамиды $SABCD$ и точек M, N, K , лежащих соответственно на гранях ABS , BCS и CDS (рис.73). Построить сечение этой пирамиды плоскостью

стью MNK .

Решение. (Метод следов). Присоединив к изображению данной пирамиды изображение (A, B, D, S) аффинного репера, мы замечаем, что данное изображение является полным.

Построим сначала след плоскости MNK на плоскости основания пирамиды, не пользуясь вторичными проекциями этих прямых. Для этого предварительно построим следы прямых MN и NK (см. задачу 10, стр.58). На рисунке 73 X_0 - след прямой MN , а Y_0 - след прямой NK . Таким образом, прямая X_0Y_0 - след плоскости MNK . Пусть l - прямая по которой пересекаются плоскости MNK и ABS . Ее вторичной проекцией является, очевидно, прямая AB . Поэтому следом этой прямой является точка $Z_0 = AB \cap X_0Y_0$. Отсюда следует, что прямая l проходит через точки Z_0 и M , т.е. совпадает с прямой MZ_0 . Она пересекает ребра SA и SB соответственно в точках A_1 и B_1 . Таким образом, плос-

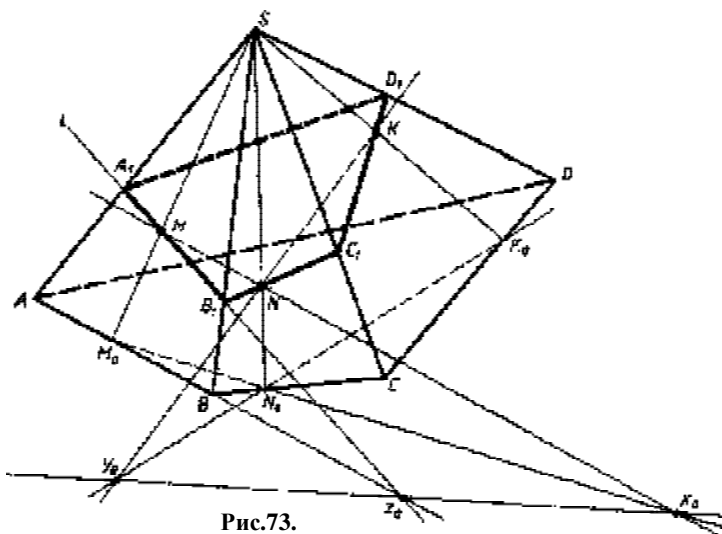


Рис.73.

кость MNK пересекает грань ABS по отрезку A_1B_1 . Затем используя точки N и K , строим последовательно отрезки B_1C_1 , C_1D_1 и D_1A_1 . Искомое сечение - четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$.

Замечание. При решении этой задачи для построения сечения пирамиды мы воспользовались следом секущей плоскости на плоскости основания пирамиды. Этот метод часто применяется при построении сечений многогранников.